La décision sous incertitude

Minh HA-DUONG

haduong@centre-cired.fr

Vendredi 12 décembre 2008 – 13:30-17:15 – ENSTA

Cours d'économie de l'environnement, 3e année

Plan de la séance

1. Maximisation de l'utilité espérée
2. Décision dans l'incertain
3. Dimensions humaines

+ questions, exercices, et pause

Théorie de la décision 1
Maximiser l'espérance de l'utilité

1. Critères de décision
2. Maximisation de l'utilité
3. Information et option
4. Limites du modèle standard

1. Un problème de décision
Le marchand de glaces

4 emplacements: $x = \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$

Temps chaud ou froid: $s = \text{C, F}$

	α	**β**	**γ**	**δ**
C	**10**	**6**	**11**	**8**
F	**2**	**4**	**0**	**3**

Profit $\Pi(s, x)$

Critères de décision

- Maximum de l'espérance de gain
- Maximin (précaution)
- Maximax

Ce n'est pas à l'analyste de choisir le critère.

2. L'utilité des gains

Croissante

Mais de moins en moins vite

Modèle de décision standard

- Gains monétaires $\pi(s,x)$
- États du monde s des probabilité $p(s)$
- Fonction d'utilité $u(\pi)$

Choisir la décision *x* qui maximise l'utilité espérée:

$$\Pi^{*} = \max_{x} \sum_{s} p(s) u(\pi(s,x))$$

Avantages du modèle standard

Portée générale: *u* paramétrise des différents critères possibles.

Garantie de rationalité

Sépare bien *u*, *p*, et π.

3. Information et option

- Stratégie contingente
- Valeur de l'information
- Valeur d'option

Le marchand de glaces

Espérance de gain en s'adaptant à s ?

	α	**β**	**γ**	**δ**
C	**10**	**6**	**11**	**8**
F	**2**	**4**	**0**	**3**

Profit $\Pi(s, x)$

Valeur de l'information

Gain espéré de la stratégie contingente

$$\Pi^{\#} = \sum_{s} p(s) \left(\max_{x} u\left(\pi(s, x)\right) \right)$$

Valeur espérée de l'information

$$EVPI = \Pi^{\#} - \Pi^{*}$$

Valeur de la flexibilité

En supposant que l'information sera

- parfaite
- gratuite

$$OV = \Pi^{\#} - \Pi^{*}$$

4. Limites du modèle standard

- Long terme
- Risque, incertitude, incomplétude
- Rationalité et décision

Long terme et actualisation

1€ à t vaut $(1+r)^{-t}$ € aujourd'hui

r taux d'actualisation

écrase les bénéfices à long terme

actualisation hyperbolique

Degrés d'ignorance

- Risque: on connait les probabilités
- Incertitude: on connait les états
- Incomplétude

Rationalité et décision

- Modèle normatif, pas descriptif:
  habitudes, émotions

- Décideur unique vs. société:
  jeux stratégiques, confiance

Conclusion 1: à retenir

- Maximiser l'espérance du gain
- ... ou de son utilité.

- Risque, incertitude, incomplétude et dimensions humaines

Théorie de la décision 2: décision dans l'incertitude

Cours Prospective et décision sous incertitude

Minh Ha-Duong, CIRED/CNRS

Plan

- Rappel du modèle standard
- Imprécision et incertitude
- Critères de décision dans l'incertain

Degrés d'erreur

- Risque: Probabilité précise justifiée
- Incertitude: Probabilité imprécise
- Incomplétude

Décision dans le risque: Maximiser l'utilité espérée

- États du monde s probabilité $p(s)$
- Acte x
- Gains monétaires $c(x,s)$
- Fonction d'utilité $u(c)$

Choisir x^* qui maximise SEU :

$$E_p u(c) = \sum_s p(s)\, u(c(x,s))$$

Exercice 1

Un individu a une fonction d'espérance de l'utilité de la forme $u(w) = w^{1/2}$, c'est à dire que "son bonheur est la racine carrée de sa richesse w". Sa richesse initiale s'élève à 4€. Il possède un billet de loterie qui peut valoir 12€ avec la probabilité ½ et 0€ avec la probabilité ½.

1.1) Quelle sont sa richesse et son utilité dans les différents états du monde ?

1.2) Quelle est l'espérance de sa richesse et de son utilité ?

1.3) Quel est le plus petit prix p auquel il serait disposé à vendre le billet de loterie ?

Corrigé 1

1.1 et 1.2)

	Richesse	Utilité
Gagnant	16	4
Perdant	4	2
Espérance	10	3

1.3) S'il ne vend pas son utilité espérée est 3.
S'il vend au prix x, sa richesse est $4+x$ et son utilité $(4+x)^{1/2}$
Il est prêt à vendre si $(4+x)^{1/2} > 3$, c'est à dire $x > 5$

Définition: équivalent certain

L'investisseur est indifférent entre détenir le billet de loterie et détenir l'équivalent certain: 5 euros.

On appelle équivalent certain de $w_{risqué}$
la richesse sans risque w_{eq}
qui procure la même utilité que $w_{risqué}$:

$$u(w_{eq}) = E\, u\, (w_{risqué})$$

c'est à dire $$w_{eq} = \mathrm{u}^{-1}(E\, u\, (w_{risqué}))$$

Définition: Prime de risque

L'investisseur est averse au risque, l'équivalent certain (5) est inférieur à l'espérance de gain (6).

On appelle prime de risque la différence entre l'espérance de gain risqué et l'équivalent certain:

$$\textit{Prime de risque} = E\, w_{risqué} - w_{eq}$$

Exercice 2

Un individu dispose d'un revenu de mille euros. On lui offre la possibilité d'investir dans un projet qui présente 50 % de chance de rapporter 200 euros et 50 % de chance d'imposer des pertes de 100 euros. L'utilité que l'individu retire de différents niveaux de revenu est :

Revenu	***900***	***950***	***1000***	***1010***	***1100***	***1200***
Utiles	200	210	214	214.5	218.8	220

2.1) Cet individu choisit-il d'investir dans le projet ?

2.2) Quel est le coût du risque, mesuré par la prime de risque ?

2.3) Supposez maintenant que le projet est également partagé entre deux investisseurs qui, tous les deux, disposent des préférences décrites ci-dessus. Choisissent-ils d'investir dans le projet ?

Corrigé 2

2.1) Non car s'il investit, son utilité espérée est
210 = 0.5*u(900) + 0.5*u(1200), contre 214 s'il n'investit pas.

2.2) 1050 – 950 = 100 euros

2.3) Oui. Les gains et les pertes sont partagées, ce qui fait que l'espérance de l'utilité devient 214.5.

2. Imprécision et incertitude

La probabilité n'est pas unique,
c'est un intervalle:

- Urne d'Ellsberg
- Paris cohérents (De Finetti)
- Modèle de Dirichlet imprécis

2.1 Urne d'Ellsberg

Tirage d'une boule d'une boite contenant

- 3 boules de couleur
- 1 est jaune
- les 2 autres sont rouges ou noires

La probabilité de *rouge* est comprise entre 0 et 2/3.

2.2 Petit exercice...

Un investisseur a accepté un projet lui rapportant 4 utiles dans le cas favorable (probabilité p) et -4 sinon.

On suppose qu'il est rationnel au sens SEU.

Qu'en déduit-on sur p ?

Paris et information

S'il a accepté l'investissement,

$4\,p + (-4)\,(1-p) > 0$

c'est à dire $\boldsymbol{p > ½}$

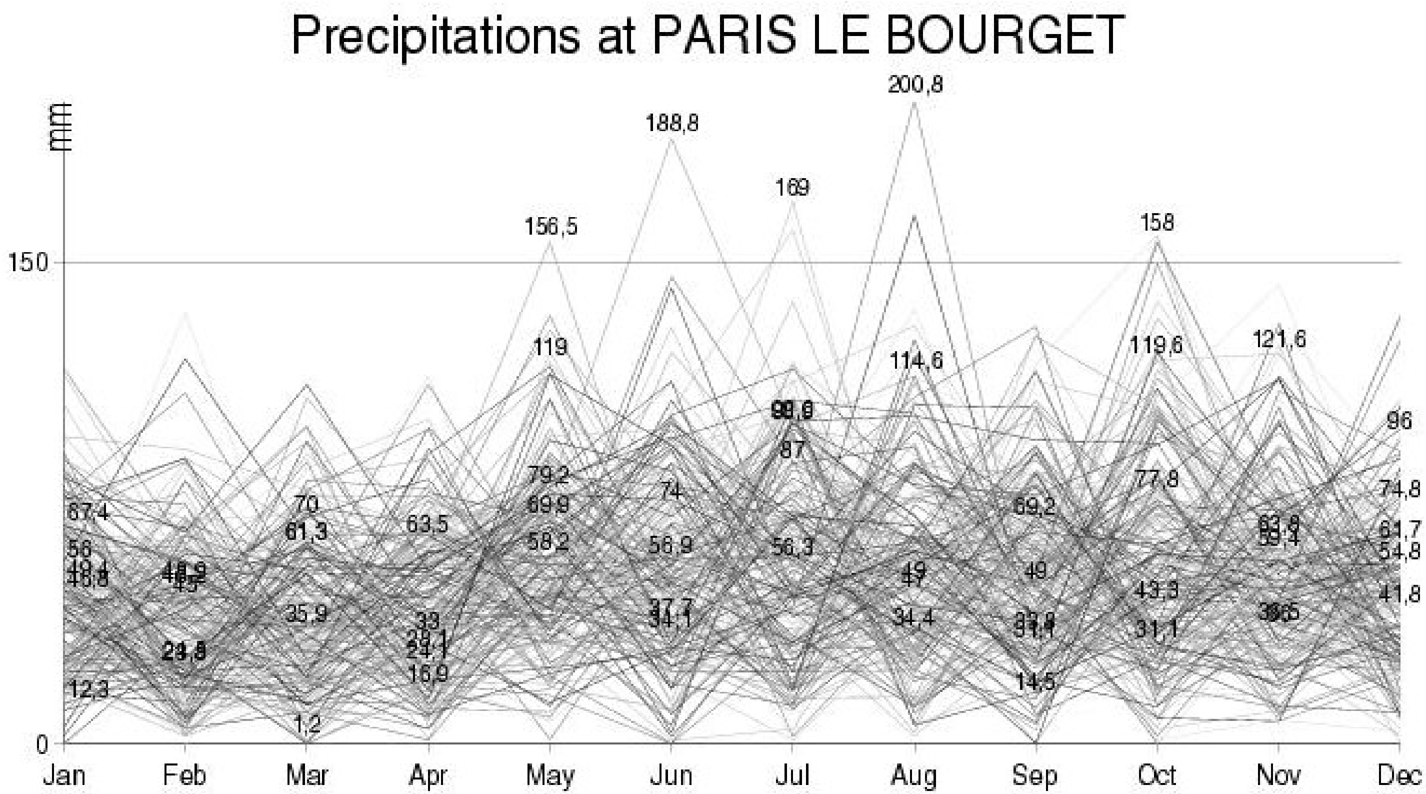
Les comportement révèlent les croyances des agents économiques

Application: marchés prédictifs

2.3 Inférence imprécise

- *Probabilité d'un mois très pluvieux à Paris l'année prochaine ?*
- Arbitrage précision/confiance
- Quand, peu/pas d'observations, une réponse imprécise: 2.5 à 5 pourcent peut être mieux justifiée.

9 mois pluvieux en 219 ans



Modèle Beta Imprécis

Croyance = fréquence après l'an prochain:

- plus que 9/(219+1)
- moins que (9+1) / (219+1)

Cas général de *m* positifs en *n* essais:

$$[\frac{m}{n+s}, \frac{m+s}{n+s}]$$

Mois pluvieux à Paris

Periode		***n***	***m***	***s***	**Croyance (%)**
1870-1989	219	9	0	4.1 précise	
idem		219	9	1	4.1 - 4.5
idem		219	9	2	4.1 - 5.0
1900-	89	3	1	3.3 - 4.4	
1950-	39	1	1	2.5 - 5.0	

Accident nucléaire majeur

Periode		***n***	***m***	***s***	**Croyance (%)**
1950-2006	56	2	1	3.5 - 5.3	
1986-2006		20	0	1	0 - 4.8

Niveau de
possibilité
1/21

3. Incertitude et décision

- Croyance: p imprécise

$$p \in C$$

- Par exemple: s très peu probable

$$p(s) \leq 0.1$$

Décision dans l'incertain

- États du monde s
- Probabilité imprécise $p \in C$
- Acte x
- Gains en utiles $u(x,s)$

Comment choisir x^* ?

Critères de Bayes

On peut se ramèner au cas standard
si on se donne une règle pour choisir
une probabilité précise p_0 dans C .

On dit que $x^{\#}$ est un pari de Bayes ssi
il existe p_0 dans C tel que

$$x^{\#} = \max_{x} E_{p_0} x$$

Choix de p_0 ??

Critères optimiste/pessimiste

Choisir x^* qui maximise:

$$\overline{P}(x) = \max_{p \in C} E_p u(x, s)$$

ou:

$$\underline{P}(x) = \min_{p \in C} E_p u(x, s)$$

Critère de Ellsberg

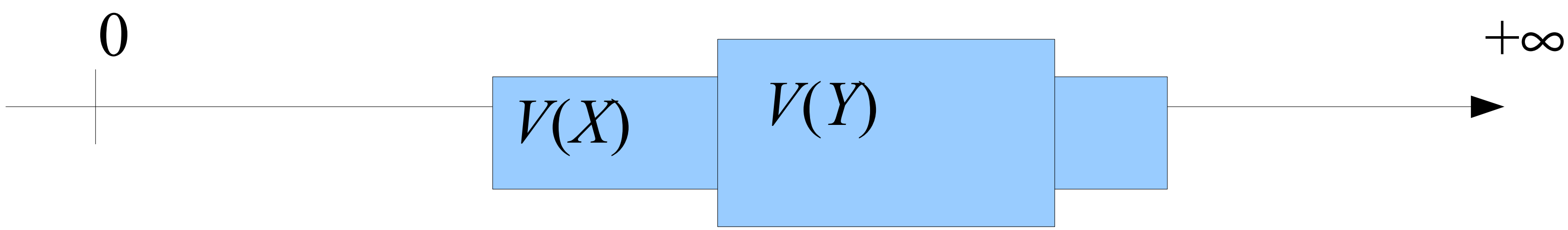
$$U(X) = aE_{p_0}X + (1-a)(b\overline{P}(X) + (1-b)\underline{P}(X))$$

Y est préféré à X ssi $U(Y) > U(X)$

Critère de Bewley/Walley

La valeur espérée est un intervalle

$$V(X) = [\underline{P}(X), \overline{P}(X)]$$



Pas d'ordre total mais partiel:

Donner X pour recevoir Y ssi $\underline{P}(Y - X) \geq 0$

Conclusion 2: à retenir

- L'information est parfois imprécise
- Deux familles de critère de décision, ordre total ou partiel

Théorie de la décision 3: dimensions humaines

Prospective et décision sous incertitude

Minh Ha-Duong, CIRED/CNRS

Dimensions de l'ignorance

Erreur: information incomplète, désir de corriger
(risque, incertitude, incomplétude)

1. Aspects psychologiques
2. Aspects stratégiques

1. Dimensions psychologiques

Ignorance active des éléments
hors de propos

- Surprise
- Métaphysique
- Tabous

Surprise

Chose inattendue:

Désaccord entre un stimulus et la connaissance pré-établie.

Surprise $\neq$ changement abrupt

Rôle des scénarios

Métaphysique

- Non vérifiable: mystères de la Foi, valeurs, systèmes de croyance
- Paramètres du modèle de décision: risque, critère, temps, équité.
- Diversité, source de résilience
- Rôle du dialogue

Tabous

- Ce que les membres d'un groupe social ne doivent pas savoir ni même demander
- Exemple: mandat GIEC
- Dénégation morale (injuste) dérape vers déni scientifique (faux)
- Rôle des intervenants extérieurs

2. Ignorance stratégique

- Conflits
- Confiance et coordination
- Passager clandestin
- Asymmétrie d'information

Jeu des prisonniers

- Deux prisonniers, chacun peut
  - dénoncer l'autre (s=D)
  - garder le silence (s=C)
- La condamnation est
  - Lourde si seul coupable (u=0)
  - Moyenne si torts partagés (u=1)
  - Relaxe si personne n'avoue (u=2)
  - Récompense si seul informateur (u=3)

Dilemne du prisonnier

$$S_{bleu} = S_{rouge} = \{C\text{: se taire, D: parler}\}$$

Gain du joueur bleu

	D	C
D	1	3
C	0	2

Gain du joueur rouge

	D	C
D	1	0
C	3	2

Vous faites quoi ?

Rationalité: individuelle ou collective ?

- Stratégie dominante: dénoncer l'autre
- Optimum collectif non stable
- Equilibre de Nash: personne n'a intérêt à dévier

Gain du joueur bleu

	D	**C**
D	1	3
C	0	2

Gain du joueur rouge

	D	**C**
D	1	0
C	3	2

Hypothèses critiques

- Décisions indépendantes
- Les joueurs connaissent le jeu
- Jeu unique

Conclusion 3

La prospective doit répondre aux dimensions humaines de l'ignorance