RTP M3D Mathématiques et décision pour le développement durable
Réunion du lundi 16 juin 2008 (9h00 – 17h00)

Fusion des opinions d'expert en situation de controverse

Minh Ha-Duong

La fusion des opinions d'experts en situation de controverse

- Non indépendance $\rightarrow$ Attention à la fausse précision
- Contradiction totale des opinions
- Eviter l'*argumentum ad populum*: (science valide $\neq$ vote democratique)
- Peut-on jauger les experts ?

Plan

1. Le modèle des croyances transférables
2. L'aggrégation hiérarchique des opinions d'experts
3. Discussion (au choix)

1. Le modèle des croyances transférables (TBM)

On représente un état de croyance en répartissant une masse totale unitaire entre tous les sous ensembles A de Ω.
Soit $m : 2^{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ telle que:

$$\sum_{A \subset \Omega} m(A) = 1$$

Exemple: Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_7\}$, la certitude que l'état du monde est dans $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ se représente par la répartition m définie par

$$\begin{cases} m(\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 1 & \\ m(A) = 0 & \text{si } A \neq \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} \end{cases} \tag{1}$$

Remarque: $p(\omega_3) = p(\omega_4) = p(\omega_5) = \frac{1}{3}$ est une croyance plus précise

Répartitions de masse particulières

Certitude que l'état du monde est dans le sous ensemble E

$m = \mathbf{1}_E$, la fonction indicatrice de E:

$$\begin{cases} m(E) = 1 \\ m(A) = 0 \quad \text{si } A \neq E \end{cases} \tag{2}$$

On ne sait rien (a priori) Croyance vide $\mathbf{1}_\Omega$

Confusion totale (a posteriori) Croyance contradictoire $\mathbf{1}_\emptyset$.

Discounting et croyances simples

On ajoute un doute r à une croyance m en la mélangeant avec la croyance vide:

$$\mathrm{disc}(m, r) = (1 - r)\, m + r\, \mathbf{1}_\Omega \tag{3}$$

On note A^w la croyance simple
"L'état du monde est dans A, avec un degré de confiance s" :

$$A^w = \mathrm{disc}(\mathbf{1}_A, e^{-s}) \tag{4}$$

C'est à dire:

$$\begin{cases} A^s(A) = 1 - e^{-s} & \\ A^s(\Omega) = e^{-s} & \\ A^s(X) = 0 & \text{si } X \neq A \text{ et } X \neq \Omega \end{cases}$$

Opérateurs $\circledcap$ et $\circledcup$ de combinaison des croyances

Quand deux sources d'information fiables et indépendantes disent l'une A et l'autre B, on croit à l'intersection des opinions:

$$\mathbf{1}_A \circledcap \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$$

Généralisation:

$$(\mu_1 \circledcap \mu_2)(A) = \sum_{B\cap C=A} \mu_1(B)\mu_2(C)$$

Problème si controverses: on va vers $\mathbf{1}_\emptyset$.

Quand au moins l'une des sources est fiable on prend l'union.

$$(\mu_1 \circledcup \mu_2)(A) = \sum_{B\cup C=A} \mu_1(B)\mu_2(C)$$

Factorisation de m en croyances simples

Pour toute m telle que $m(\Omega) > 0$, il existe $\big(s(A)\big)_{A \subsetneq \Omega}$ tels que:

$$m = \bigcircledcap_{\substack{A \subset \Omega \\ A \neq \Omega}} A^{s(A)} \tag{5}$$

La conjonction $\circledcap$ correspond à l'addition:

$$m_1 \circledcap m_2 = \bigcircledcap_{A \subset \Omega, A \neq \Omega} A^{s_1(A)+s_2(A)}$$

Non idempotence, $A^s \circledcap A^s = A^{2s}$. Conjonction justifiée si informateurs indépendants entre eux, sinon fausse précision.

Opérateur de combinaison prudente

Cf. le plus petit multiple commun:

$$m_1 \owedge m_2 = \bigcap_{A \subset \Omega, A \neq \Omega} A^{\max(w_1(A), w_2(A))}$$

Idempotent: $m_1 \owedge m_1 = m_1$

Distributif: $(m_1 \ocap m_2) \owedge (m_1 \ocap m_3) = m_1 \ocap (m_2 \owedge m_3)$

Bilan des opérateurs de fusion dans le TBM

Aucun n'est totalement satisfaisant:

	Moyenne	$\bigcap$	$\bigcup$	$\bigwedge$
ad populum	☹	✓	✓	✓
Contradiction	✓	☹	✓	☹
Dépendance	✓	☹	☹	✓
Biais	$\rightarrow \frac{1}{n}$	$\mathbf{1}_\emptyset$	$\mathbf{1}_\Omega$	$\mathbf{1}_\emptyset$

Renormaliser en divisant par $1 - m(\emptyset)$ ne résoud rien.
Pondérer les experts est difficile.

Approche hiérarchique

1. Partitionner les experts en groupes/écoles/théories
2. Intra-groupe, $\bigcirc\!\!\!\!\wedge$ conjonction prudente des opinions
3. Entre les groupes, $\bigcirc\!\!\!\!\cup$ disjonction

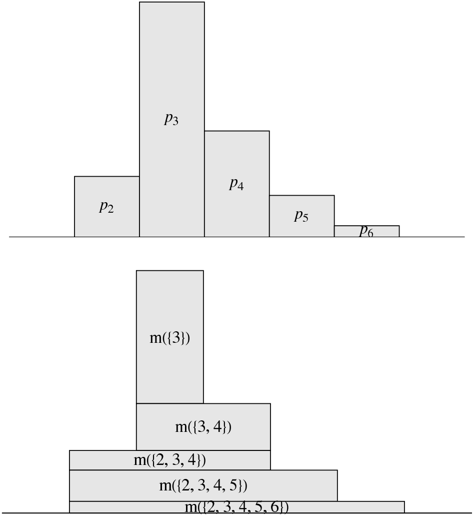
2. Application

La sensibilité climatique $\Delta T_{2\times}$: une ancre imprécise. Publications de lois de probabilités subjectives et (plus récement) objectives. Entre 1.5°C et 4.5°C ou plus?

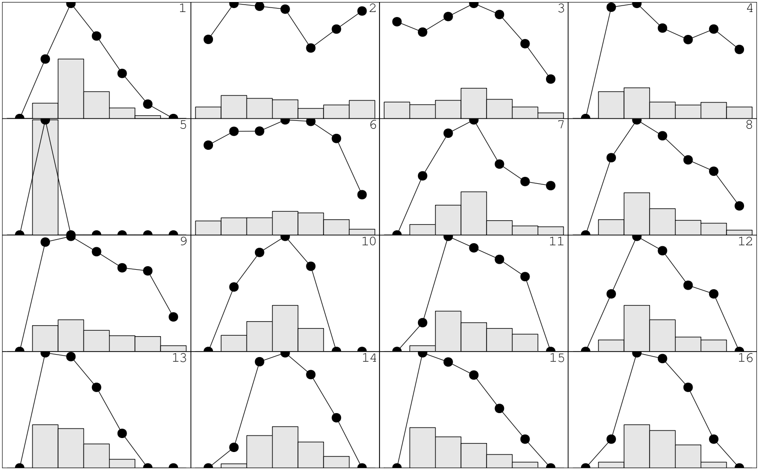
On subdivise en 7 intervalles:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega_1, \ldots, \omega_7\} \\ &= \{[-6, 0],\ [0, 1.5],\ [1.5, 2.5],\ [2.5, 3.5],\ [3.5, 4.5],\ [4.5, 6],\ [6, 12]\}\end{aligned}$$

Croyances de l'expert 1: m bayésien en haut, m consonnant en bas



Opinions recueillies par Morgan et Keith en 1995



Fusion des 16 opinions en 2 temps

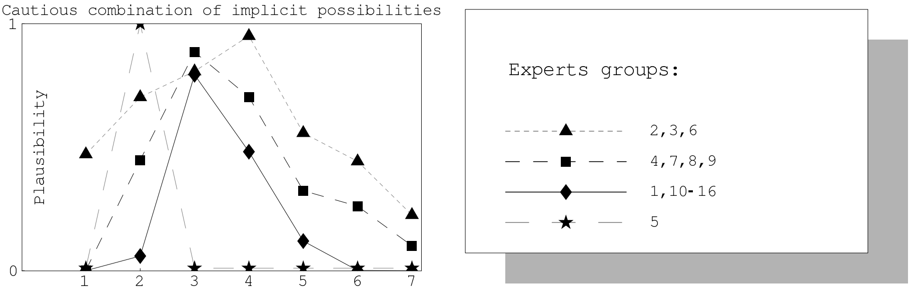
Conjonction prudente intra :

$$\begin{aligned} m_A &= m'_2 \owedge m'_3 \owedge m'_6 \\ m_B &= m'_4 \owedge m'_7 \owedge m'_8 \owedge m'_9 \\ m_C &= m'_1 \owedge m'_{10} \owedge \cdots \owedge m'_{16} \\ m_D &= m'_5 \end{aligned}$$

Disjonction entre groupes

$$m^* = m_A \ocup m_B \ocup m_C \ocup m_D$$

Conjonction prudente intra-groupes



Résultat: fonction de masse

subset A	$m^*(A)$
$\{2\}$	0.0001
$\{3, 2\}$	0.0074
$\{4, 2\}$	0.0033
$\{4, 3, 2\}$	0.1587
$\{4, 3, 2, 1\}$	0.0064
$\{5, 4, 2\}$	0.0011
$\{5, 4, 3, 2\}$	0.1321
$\{5, 4, 3, 2, 1\}$	0.0709
$\{6, 4, 3, 2\}$	0.0267
$\{6, 4, 3, 2, 1\}$	0.0129
$\{6, 5, 4, 3, 2\}$	0.0888

subset A (suite)	$m^*(A)$
$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$	0.1811
$\{7, 4, 3, 2\}$	0.0211
$\{7, 5, 4, 3, 2\}$	0.0063
$\{7, 6, 4, 3, 2\}$	0.0135
$\{7, 6, 4, 3, 2, 1\}$	0.0105
$\{7, 6, 5, 4, 3, 2\}$	0.0632
$\{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$	0.1956

Interprétation en probabilité moyenne

Toute m définit une probabilité 'moyenne' p^m par:

$$p^m(\omega) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} \sum_{\omega \in X} \frac{m(X)}{|X|} \tag{6}$$

Interprétation en degré de plausibilité

"Les masses de croyance $m(A)$ sont libres de se répartir n'importe comment dans A, un partage équitable de la croyance $m(A)$ entre les différentes alternatives composant A ne se justifie pas."

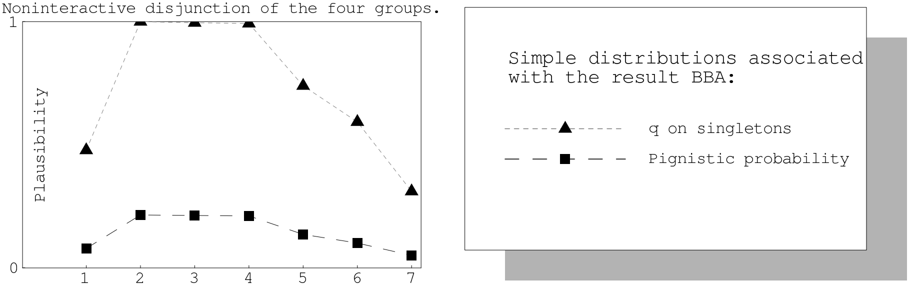
Pour un singleton, la masse minimale est $m(\{\omega_i\})$

Masse maximale: Somme des masses de tous les sous ensembles contenant ω_i.

$$pl(\{\omega_i\}) = \sum_{A \subset \Omega \text{ tel que } \omega_i \in A} m(A)$$

Plausibilité que l'état du monde soit ω_i.

Résultat en p^m et en plausibilité



$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega_1, \ldots, \omega_7\} \\ &= \{[-6,0],\ [0,1.5],\ [1.5,2.5],\ [2.5,3.5],\ [3.5,4.5],\ [4.5,6],\ [6,12]\}\end{aligned}$$

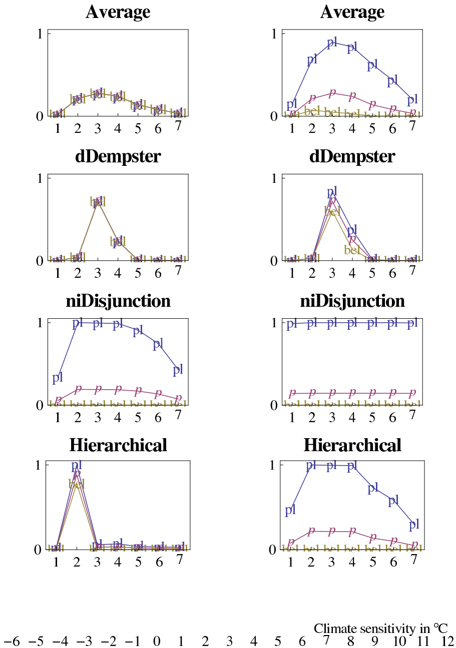
3. Discussions

Discussion A: Comparaison des modes de fusion

Discussion B: La sensibilité climatique

Discussion C: Exploitation du résultat: TBM et décision

Discussion A: Comparaison des méthodes de fusion



Discussion B: Sensibilité climatique

Réchauffement global au XX^{e} siècle: $+0.7^{\circ}$C
Récement: $+0.2^{\circ}$C par decennie.

Concentration CO_2: $+30\%$.

$\Delta T_{2\times}$: réchauffement correspondant au doublement de la concentration de CO_2 équivalent.

$0.7 \;/\; 30\% * 100\% \simeq 2.3\ ^{\circ}$C.

Littérature récente sur la sensibilité climatique

IPCC 2001: Likely ($0.66 \leq p \leq 0.90$) to be in 1.5 to 4.5°C range (estimate unchanged from 1979)

IPCC 2007: [2, 4.5°C] likely, below 1.5°C very unlikely ($p \leq 0.1$)

	$T_{2x} \in [0°\mathrm{C}, 1.5°\mathrm{C}]$	$[1.5°\mathrm{C}, 4.5°\mathrm{C}]$	$[4.5°\mathrm{C}, 10°\mathrm{C}]$
PDF Littérature	[0, 0.07]	[0.31, 0.98]	[0.02, 0.62]
Kriegler (2005)	[0, 0.00]	[0.53, 0.99]	[0.01, 0.47]

Table: Intervalles de probabilité pour la sensibilité climatique. Exemple: $0.31 \leq p(\Delta T_{2x} \in [1.5°\mathrm{C}, 4.5°\mathrm{C}]) \leq 0.98$.

Comparer avec:

ω	-6,0	0,1.5	1.5,2.5	2.5,3.5	3.5,4.5	4.5,6.0	6.0,12
pl	0.48	1.	1.	0.99	0.74	0.59	0.31
p	0.08	0.21	0.21	0.21	0.14	0.10	0.05

Discussion C: Critères de décision standard

Maximiser l'espérance de l'utilité avec la probabilité 'moyenne' p^m définie par (rappel):

$$p^m(\omega) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} \sum_{\omega \in X} \frac{m(X)}{|X|}$$

Critère de décision nonadditifs

Toute distribution de masse m définit:
Une mesure de croyance (notion de nécessité, X doit arriver)

$$bel(X) = \sum_{\substack{A \subseteq X \\ A \neq \emptyset}} m(A) \tag{7}$$

Une mesure de plausibilité (notion de possibilité, X peut arriver)

$$pl(X) = \sum_{\substack{A \subseteq \Omega \\ A \cap X \neq \emptyset}} m(A) \tag{8}$$

Donne des critères de décision mixtes.

Critère de décision incomplet

m définit une famille de probabilités toutes également admissibles:

$$M = \{p : \forall X \; bel(X) \leq p(X) \leq pl(X)\}$$

Un choix qui maximise l'espérance de l'utilité par rapport à l'une quelconque des probabilités de M est dit de Bayes.

Critère de décision incomplet: En l'absence d'information plus précise, n'importe quel choix de Bayes est rationnel.
Critère de précaution: On échange une perspective de gain f contre g si et seulement si l'espérance de $g - f$ est positive pour tout $p \in M$.

Conclusions

Sur la méthode:

- Approche hiérarchique originale, accepte l'imprécision
- Répond aux défis méthodologiques
- Modélisation sociologique du groupe d'experts

Sur la sensibilité climatique:

- Au dessus de $4.5^{\circ}C$ déjà plausible en 1995
- En dessous de $1.5^{\circ}C$ moins plausible aujourd'hui